Stochastické hry

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Úloha 1:

Problém.

Hru hrají dva hráči H_A a H_B. Střídavě házejí mincí a zvítězí ten, komu dříve padne rub. Házet začíná hráč H_A. Který z hráčů má větší šanci na vítězství v této hře?

Řešení: Pravděpodobnostní prostor „čekání na rub"

ω_k - rub padne poprvé v k-tém hodu, $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \ldots\} = \{r, lr, llr, lllr, llllr, \ldots\}$$

$$p(\omega_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Řešení:

$$A = \{\text{zvítězí hráč } H_A\} = r, llr, llllr, \ldots$$

$$B = \{\text{zvítězí hráč } H_B\} = lr, lllr, lllllr, \ldots$$

$$P(A) = p(r) + p(llr) + p(llllr) + \cdots =$$

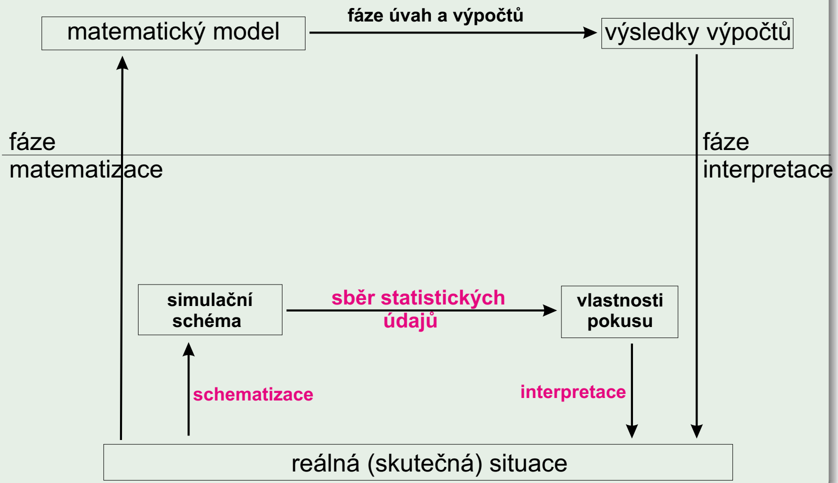
$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

$$P(B) = p(lr) + p(lllr) + p(lllllr) + \cdots =$$

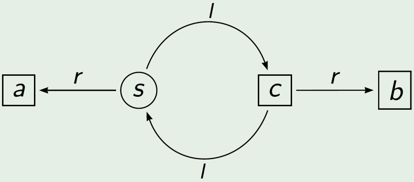
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \cdots = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

Větší šanci na výhru má hráč H_A.

Schéma - tři fáze řešení úlohy



Stochastický graf



Označme $x = P(A)$. Pak

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x,$$

odtud plyne, že

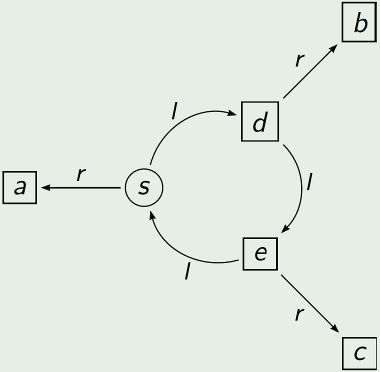
$$x = \frac{2}{3} = P(A).$$

Zobecnění:

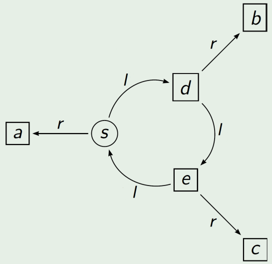
- Více hráčů - tři, čtyři, ...
- Čekáme na druhý, třetí atd. rub v pořadí.
- Pravděpodobnost úspěchu (padnutí rubu) není rovna $\frac{1}{2}$.

Úloha 2: (tři hráči)

Hru hrají tři hráči H_A, H_B a H_C. Hráči se pravidelně střídají v hodu mincí a zvítězí ten, komu dříve padne rub. Házet začíná hráč H_A, pak hází hráč H_B, pak H_C atd. Který z hráčů má větší šanci na vítězství v této hře?



Úloha 2: (tři hráči)



Označme $x = P(A)$. Pak

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x,$$

odtud plyne, že

$$x = \frac{4}{7} = P(A).$$

Podobně vypočteme $P(B) = \frac{2}{7}$ a $P(C) = \frac{1}{7}$.

Úloha 3: (čekání na druhý rub)

Problém.

Dva hráči H_A a H_B házejí střídavě mincí. Vyhrává ten, při jehož hodu se v sérii všech získaných výsledků právě **podruhé** objevil rub. Házet začíná hráč H_A. Který z hráčů má větší šanci na vítězství v této hře?

A - zvítězí hráč H_A, A_1 - první rub padl hráči H_A, B_1 - první rub padl hráči H_B

$$P(A) = P(A \mid A_1) \cdot P(A_1) + P(A \mid B_1) \cdot P(B_1).$$

Protože

$$P(A_1) = \frac{2}{3}, P(A_2) = \frac{1}{3}, P(A \mid A_1) = \frac{1}{3}, P(A \mid B_1) = \frac{2}{3}$$

tak

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}.$$

Tedy

$$P(B) = \frac{5}{9}.$$

Úloha 4: (čekání na $k-$tý rub)

Problém.

Dva hráči H_A a H_B házejí střídavě mincí. Vyhrává ten, při jehož hodu se v sérii všech získaných výsledků objevil právě $k-$**tý** rub. Házet začíná hráč H_A. Který z hráčů má větší šanci na vítězství v této hře?

1. $k = 2n + 1$

$$P(A_{2n+1}) = \frac{1}{9}\Big[\dots\Big(\frac{1}{9}\cdot\Big(\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}+\frac{4}{9}\Big)+\frac{4}{9}\Big)\dots\Big]+\frac{4}{9} = \frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{3^{2n+1}}\Big).$$

Odtud

$$P(B_{2n+1}) = \frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{3^{2n+1}}\Big).$$

Pro $k = 2n + 1$ je hra výhodnější pro hráče H_A.

2. $k = 2n$

$$P(A_{2n}) = \frac{1}{9}\Big[\dots\Big(\frac{1}{9}\cdot\Big(\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{9}+\frac{4}{9}\Big)+\frac{4}{9}\Big)\dots\Big]+\frac{4}{9} = \frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{3^{2n}}\Big).$$

Odtud

$$P(B_{2n}) = \frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{3^{2n}}\Big).$$

Pro $k = 2n$ je hra naopak výhodnější pro hráče H_B.

Úloha 5: (losování koulí z urny)

Problém.

Dva hráči H_A a H_B střídavě losují kouli z urny, ve které jsou červené a modré koule. Vyhrává ten, z hráčů, který jako první vylosuje kouli své barvy, tj. hráč H_A červenou kouli, hráčH_B modrou kouli. Losování začíná hráč H_A. Lze najít takový počet červených a modrých koulí v urně, aby byla uvedená hra spravedlivá?