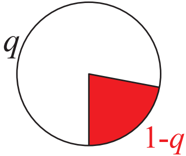
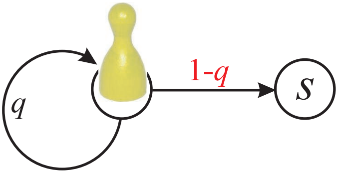
PROPER

PROBABILITY AROUND US
PROBABILITY FOR EVERYONE

Součet geometrické řady

$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \frac{1}{1-q}$, pro $|q| < 1$





$$x = (1 - q) + q \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

$$(1 - q) + q \cdot (1 - q) + q^2 \cdot (1 - q) + \ldots = 1$$

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \frac{1}{1 - q}$$

Příklad 1:

Na množině $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, m\}$ jsou určeny funkce

a) $p_1(k) = \binom{m}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^m$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots, m$;

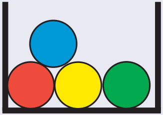
b) $p_2(k) = \binom{m}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{m-k}$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots, m$.

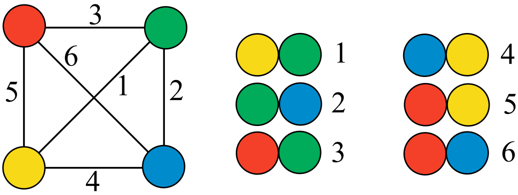
Ukažte, že funkce p_1 a p_2 jsou rozdělením pravděpodobnosti na množině Ω.

Najděte k těmto pravděpodobnostním prostorům odpovídající náhodné pokusy.

Příklad 2:

Určete stochastický model současného losování dvou koulí z této urny. „Nahradí" tato urna hrací kostku?





Příklad 3:

V urně U jsou tři koule: modrá, červená a žlutá. Navrhněte takové losování z této urny, které „nahradí" hrací kostku.

Nezávislost jevů A, B : $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Příklad 4: „Nezkušený porotce"

Soudní porota má pět členů A, B, C, D, E a rozhoduje. Porotci se rozhodují nezávisle na sobě. Porotci A a B vynesou správný verdikt s pravděpodobností 0,95, porotci C a D s pravděpodobností 0,9. Porotce E se splete ve 30 % případů.

- Jaká je pravděpodobnost, že porota vynese správný verdikt?
- Jak vzroste šance obžalovaného na správný verdikt, pokud E bude hlasovat stejně jako A?

Nezávislost - $A, B = 0,95 \quad C, D = 0,9 \quad E = 0,7$

A	B	C	D	E	#	pravděpodobnost
$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	1	$0,95^2 \cdot 0,9^2 \cdot 0,7$
$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	1	$0,95^2 \cdot 0,9^2 \cdot 0,3$
$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	2	$0,05 \cdot 0,95 \cdot 0,9^2 \cdot 0,7$
$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	2	$0,05 \cdot 0,95 \cdot 0,9^2 \cdot 0,3$
$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	2	$0,95^2 \cdot 0,9 \cdot 0,1 \cdot 0,7$
$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	2	$0,95^2 \cdot 0,1 \cdot 0,9 \cdot 0,3$
$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	1	$0,95^2 \cdot 0,1^2 \cdot 0,7$
$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	1	$0,05^2 \cdot 0,9^2 \cdot 0,7$
$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	4	$0,05 \cdot 0,95 \cdot 0,1 \cdot 0,9 \cdot 0,7$
						0,9905

1. situace - 0,9905

A	B	C	D	#	pravděpodobnost
$+$	$+$	$+$	$+$	1	$0,95^2 \cdot 0,9^2$
$-$	$+$	$+$	$+$	1	$0,05 \cdot 0,95 \cdot 0,9^2$
$+$	$+$	$-$	$+$	2	$0,95^2 \cdot 0,9 \cdot 0,1$
$+$	$-$	$+$	$+$	1	$0,05 \cdot 0,95 \cdot 0,9^2$
$+$	$+$	$-$	$-$	1	$0,95^2 \cdot 0,1^2$
$+$	$-$	$-$	$+$	2	$0,95 \cdot 0,05 \cdot 0,1 \cdot 0,9$
					0,988

Podmíněná pravděpodobnost

Motivace:

Pravděpodobnost jevu A může záviset na informaci, že nastal jiný příbuzný jev B. Tuto „podmíněnou" pravděpodobnost jevu A, víme-li, že nastal jev B, precizujeme z hlediska matematiky (využití dodatečné informace).

- policie
- testy u lékaře
- losování pomocí zápalek

Definice:

A, B jsou jevy v pravděpodobnostním prostoru (Ω, p), $P(B) > 0$. *Podmíněnou pravděpodobnost* $P(A|B)$ jevu A za podmínky, že nastal jev B definujeme jako podíl

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Příklad 5: Dvojnásobný hod mincí

$A = \{ \textit{ padne líc a rub} \}$
$B = \{ \textit{ na první minci padne líc} \}$
Určete pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal jev B.

1. Řešení: (podle definice) $\quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$$\Omega = \{RR, RL, LR, LL\}$$

$B = \{LR, LL\}, \qquad P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$(A \cap B) = \{LR\}, \qquad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Podmíněná pravděpodobnost

Příklad 5: Dvojnásobný hod mincí

$A = \{padne\ líc\ a\ rub\}$
$B = \{na\ první\ minci\ padne\ líc\}$
Určete pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal jev B.

2. Řešení: (vytvoříme nový pravděpodobnostní prostor)

$$\Omega = \{RR, RL, LR, LL\}$$

jev B nastal

$$\Omega_B = \{LR, LL\}$$

Spočítáme pravděpodobnost jevu A v novém prostoru Ω_B

$$P_B(A) = \frac{1}{2}$$

Příklad 6:

Jedno je z obou stran bílé, druhé z obou stran červené a třetí je z jedné strany bílé a z druhé červené. Vylosujeme z kapsy jedno kolečko a položíme na stůl, tak že je vidět jen horní strana kolečka, která je červená. Hádáte barvu strany, na které kolečko leží? Na jakou barvu vsadíte?

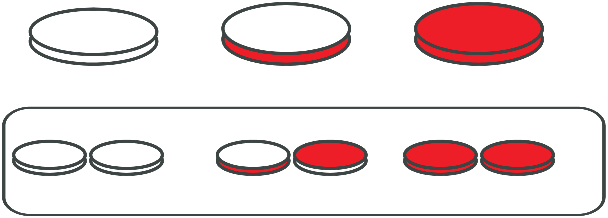
- bílou
- červenou
- je to jedno

Podmíněná pravděpodobnost

Příklad 6:

Jedno je z obou stran bílé, druhé z obou stran červené a třetí je z jedné strany bílé a z druhé červené. Vylosujeme z kapsy jedno kolečko a položíme na stůl, tak že je vidět jen horní strana kolečka, která je červená. Hádáte barvu strany, na které kolečko leží? Na jakou barvu vsadíte?

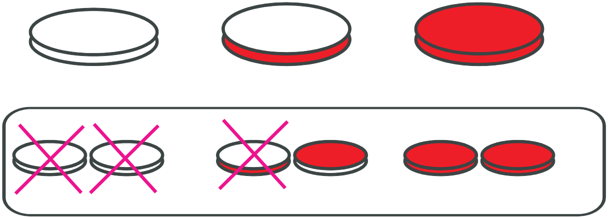
- bílou
- červenou
- je to jedno

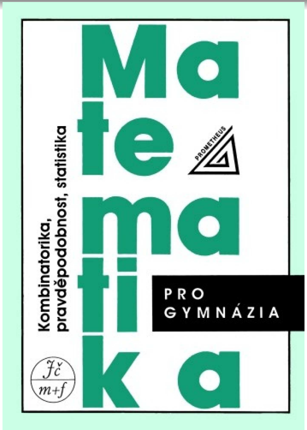


Příklad 6:

Jedno je z obou stran bílé, druhé z obou stran červené a třetí je z jedné strany bílé a z druhé červené. Vylosujeme z kapsy jedno kolečko a položíme na stůl, tak že je vidět jen horní strana kolečka, která je červená. Hádáte barvu strany, na které kolečko leží? Na jakou barvu vsadíte?

- bílou
- červenou
- je to jedno



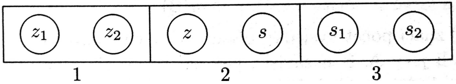


Příklad 7:

Skříň má 3 zásuvky. V první jsou 2 zlaté mince, ve druhé zlatá a stříbrná, ve třetí 2 stříbrné. Zvolíme náhodně jednu zásuvku, z ní vytáhneme naslepo jednu minci. Jaká je podmíněná pravděpodobnost, že v zásuvce zbude zlatá mince, jestliže vytažená mince byla stříbrná?

Podmíněná pravděpodobnost $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Zdánlivě je hledaná pravděpodobnost $\frac{1}{2}$, neboť stříbrnou minci lze vytáhnout jen z druhé nebo třetí zásuvky, přičemž jen v prvním z těchto dvou případů zbude zlatá. Tato úvaha je však chybná, jak nám ukáže následující správné řešení: Pokus se skládá ze 2 dílčích pokusů — volby zásuvky a volby mince. Označíme-li mince jako na obr. 2.8, jsou mož-



nými výsledky pokusu následující dvojice

$$(1, z_1),\ (1, z_2),\ (2, z),\ (2, s),\ (3, s_1),\ (3, s_2);$$

jsou stejně pravděpodobné. Značí-li jev B „byla vytažena stříbrná“ a jev A „zbývá zlatá“, pak

$$\begin{aligned} \mathsf{B} &= \{(2, s), (3, s_1), (3, s_2)\}, \quad m(\mathsf{B}) = 3, \\ \mathsf{A} &= \{(1, z_1), (1, z_2), (2, s)\}, \\ \mathsf{A} \cap \mathsf{B} &= \{(2, s)\}, \quad m(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) = 1, \\ P(\mathsf{A}|\mathsf{B}) &= \frac{m(\mathsf{A} \cap \mathsf{B})}{m(\mathsf{B})} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Příklad 7:

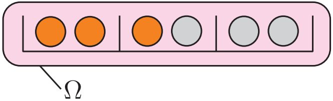
Skříň má 3 zásuvky. V první jsou 2 zlaté mince, ve druhé zlatá a stříbrná, ve třetí 2 stříbrné. Zvolíme náhodně jednu zásuvku, z ní vytáhneme naslepo jednu minci. Jaká je podmíněná pravděpodobnost, že v zásuvce zbude zlatá mince, jestliže vytažená mince byla stříbrná?

Řešení: Najdeme (Ω, p).

Příklad 7:

Skříň má 3 zásuvky. V první jsou 2 zlaté mince, ve druhé zlatá a stříbrná, ve třetí 2 stříbrné. Zvolíme náhodně jednu zásuvku, z ní vytáhneme naslepo jednu minci. Jaká je podmíněná pravděpodobnost, že v zásuvce zbude zlatá mince, jestliže vytažená mince byla stříbrná?

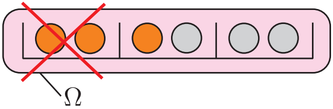
Řešení: Najdeme (Ω, p).



Příklad 7:

Skříň má 3 zásuvky. V první jsou 2 zlaté mince, ve druhé zlatá a stříbrná, ve třetí 2 stříbrné. Zvolíme náhodně jednu zásuvku, z ní vytáhneme naslepo jednu minci. Jaká je podmíněná pravděpodobnost, že v zásuvce zbude zlatá mince, jestliže vytažená mince byla stříbrná?

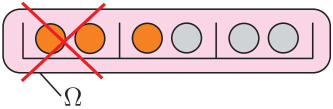
Řešení: Najdeme (Ω, p).



Příklad 7:

Skříň má 3 zásuvky. V první jsou 2 zlaté mince, ve druhé zlatá a stříbrná, ve třetí 2 stříbrné. Zvolíme náhodně jednu zásuvku, z ní vytáhneme naslepo jednu minci. Jaká je podmíněná pravděpodobnost, že v zásuvce zbude zlatá mince, jestliže vytažená mince byla stříbrná?

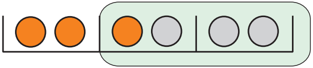
Řešení: Najdeme (Ω, p).



Příklad 7:

Skříň má 3 zásuvky. V první jsou 2 zlaté mince, ve druhé zlatá a stříbrná, ve třetí 2 stříbrné. Zvolíme náhodně jednu zásuvku, z ní vytáhneme naslepo jednu minci. Jaká je podmíněná pravděpodobnost, že v zásuvce zbude zlatá mince, jestliže vytažená mince byla stříbrná?

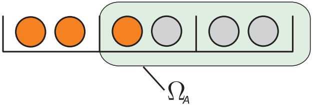
Řešení: Najdeme (Ω, p).



Příklad 7:

Skříň má 3 zásuvky. V první jsou 2 zlaté mince, ve druhé zlatá a stříbrná, ve třetí 2 stříbrné. Zvolíme náhodně jednu zásuvku, z ní vytáhneme naslepo jednu minci. Jaká je podmíněná pravděpodobnost, že v zásuvce zbude zlatá mince, jestliže vytažená mince byla stříbrná?

Řešení: Najdeme (Ω, p).



$$P(\text{zbude zlatá mince}) = \frac{1}{3}$$

Příklad 8: 4 karty - $\clubsuit$ $\diamondsuit$ $\heartsuit$ $\spadesuit$

Po zamíchání vyložím dvě z nich na stůl. Určete pravděpodobnost, že

A) obě vyložené karty budou černé,

B) obě vyložené karty budou černé, když víte, že mezi vylosovanými kartami je černá karta,

C) obě vyložené karty budou černé, když víte, že mezi vylosovanými kartami je $\clubsuit$.

Příklad 8: 4 karty - ♣ ♢ ♡ ♠

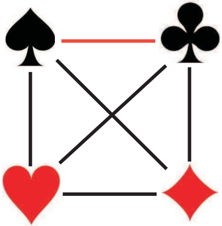
Po zamíchání vyložím dvě z nich na stůl. Určete pravděpodobnost, že

A) obě vyložené karty budou černé,

B) obě vyložené karty budou černé, když víte, že mezi vylosovanými kartami je černá karta,

C) obě vyložené karty budou černé, když víte, že mezi vylosovanými kartami je ♣.

Řešení: A)



$$P(A) = \frac{1}{6}$$

Příklad 8: 4 karty - ♣ ♢ ♡ ♠

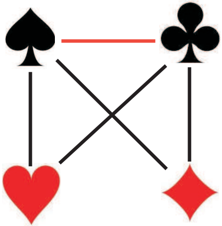
Po zamíchání vyložím dvě z nich na stůl. Určete pravděpodobnost, že

A) obě vyložené karty budou černé,

B) obě vyložené karty budou černé, když víte, že mezi vylosovanými kartami je černá karta,

C) obě vyložené karty budou černé, když víte, že mezi vylosovanými kartami je ♣.

Řešení: B)



$$P(B) = \frac{1}{5}$$

Podmíněná pravděpodobnost $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Příklad 8: 4 karty - ♣ ♢ ♡ ♠

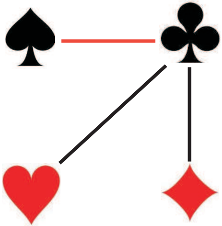
Po zamíchání vyložím dvě z nich na stůl. Určete pravděpodobnost, že

A) obě vyložené karty budou černé,

B) obě vyložené karty budou černé, když víte, že mezi vylosovanými kartami je černá karta,

C) obě vyložené karty budou černé, když víte, že mezi vylosovanými kartami je ♣.

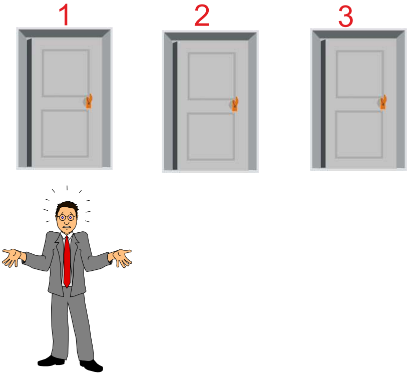
Řešení: C)



$$P(C) = \frac{1}{3}$$

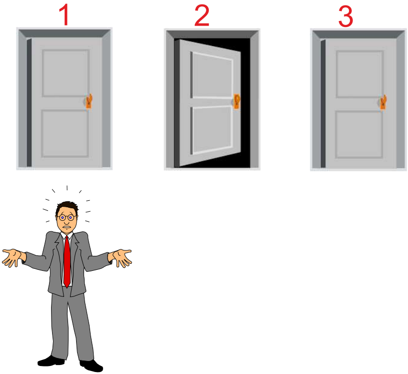
Příklad 9:

Před vámi jsou troje zavřené dveře. Za jedněmi z nich je ukryt poklad. Označíte dveře, za kterými si myslíte, že je ukryt poklad. Pak vám budou otevřeny jiné dveře, za kterými poklad není. Nyní dostanete šanci popřípadě změnit svůj tip (tzn. vybrat jiné dveře). Má to smysl?

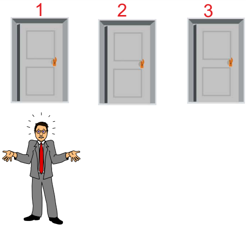


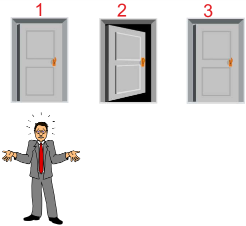
Příklad 9:

Před vámi jsou troje zavřené dveře. Za jedněmi z nich je ukryt poklad. Označíte dveře, za kterými si myslíte, že je ukryt poklad. Pak vám budou otevřeny jiné dveře, za kterými poklad není. Nyní dostanete šanci popřípadě změnit svůj tip (tzn. vybrat jiné dveře). Má to smysl?

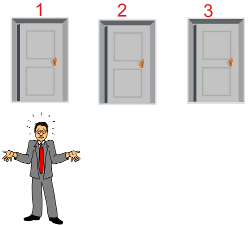


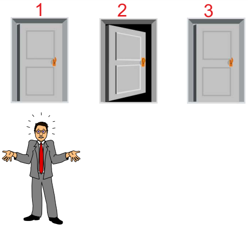
Podmíněná pravděpodobnost





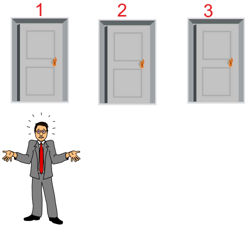
Podmíněná pravděpodobnost

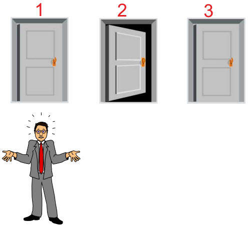




Na začátku:

Podmíněná pravděpodobnost

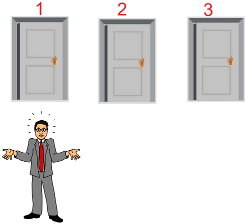




Na začátku:

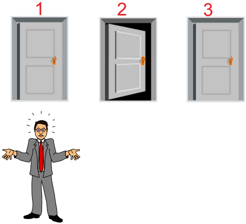
$P(D_1) = P(D_2) = P(D_3) = \frac{1}{3}$

Podmíněná pravděpodobnost



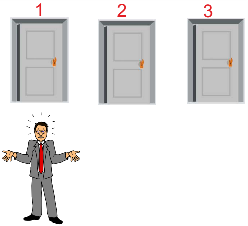
Na začátku:

$P(D_1) = P(D_2) = P(D_3) = \frac{1}{3}$



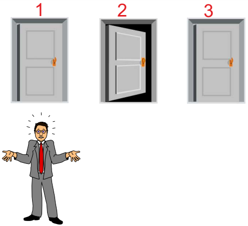
Po otevření dveří:

Podmíněná pravděpodobnost



Na začátku:

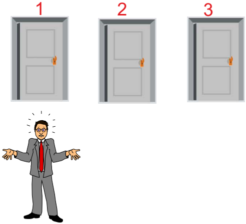
$P(D_1) = P(D_2) = P(D_3) = \frac{1}{3}$

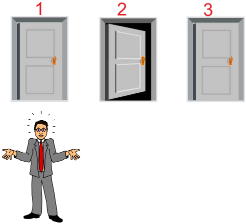


Po otevření dveří:

$P(D_1) = P(D_3) = \frac{1}{2}$

Podmíněná pravděpodobnost





Na začátku:

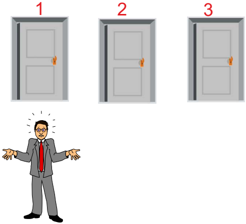
$P(D_1) = P(D_2) = P(D_3) = \frac{1}{3}$

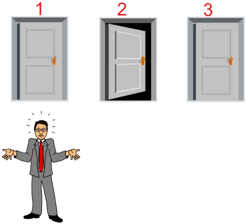
Po otevření dveří:

$P(D_1) = P(D_3) = \frac{1}{2}$

Správná odpověď:

Podmíněná pravděpodobnost





Na začátku:

$P(D_1) = P(D_2) = P(D_3) = \frac{1}{3}$

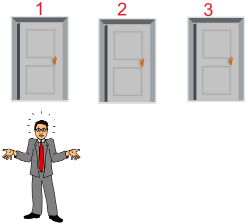
Správná odpověď:

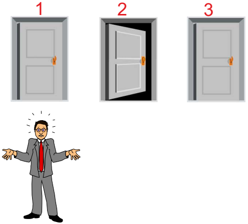
$P(D_1) = \frac{1}{3}, \quad P(D_3) = \frac{2}{3}$

Po otevření dveří:

$P(D_1) = P(D_3) = \frac{1}{2}$

Podmíněná pravděpodobnost





Na začátku:

$P(D_1) = P(D_2) = P(D_3) = \frac{1}{3}$

Po otevření dveří:

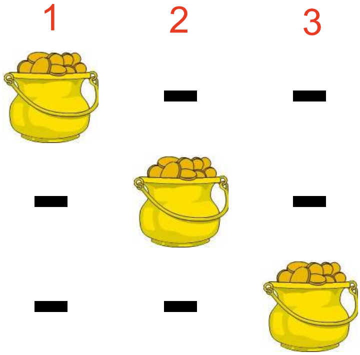
$P(D_1) = P(D_3) = \frac{1}{2}$

Správná odpověď:

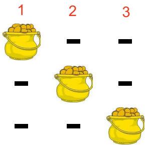
$P(D_1) = \frac{1}{3}, \quad P(D_3) = \frac{2}{3}$

PROČ?

Podmíněná pravděpodobnost

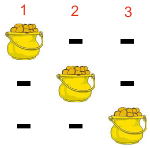


Podmíněná pravděpodobnost

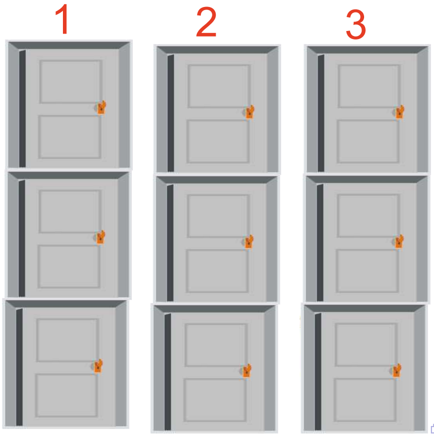


Strategie - „neměním názor"

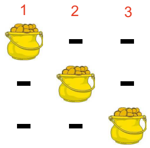
Podmíněná pravděpodobnost



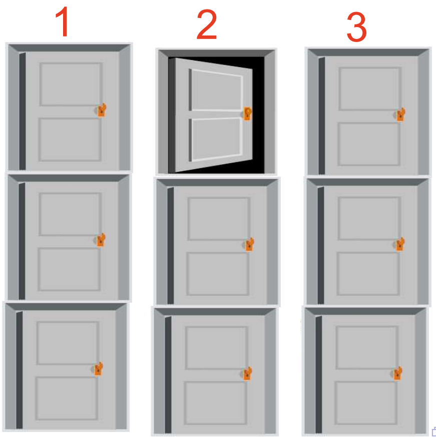
Strategie - „neměním názor”



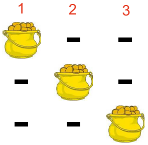
Podmíněná pravděpodobnost



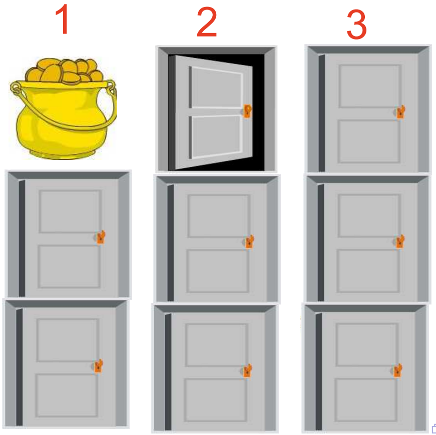
Strategie - „neměním názor”



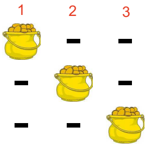
Podmíněná pravděpodobnost



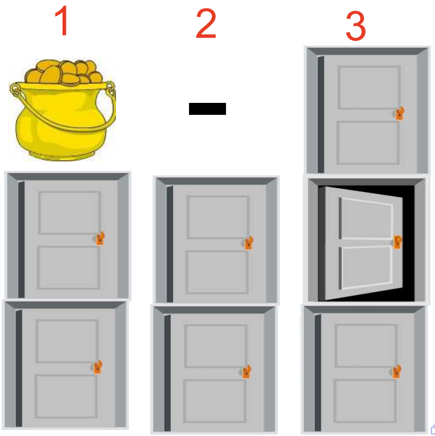
Strategie - „neměním názor"



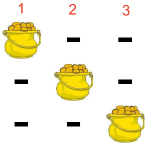
Podmíněná pravděpodobnost



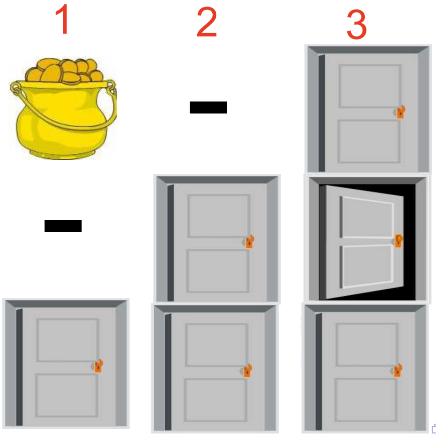
Strategie - „neměním názor"

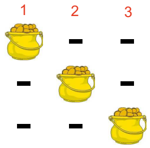


Podmíněná pravděpodobnost

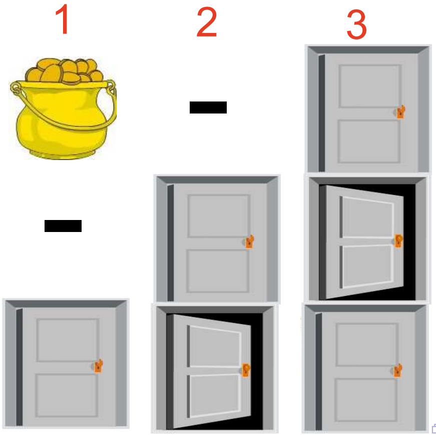


Strategie - „neměním názor”

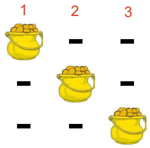




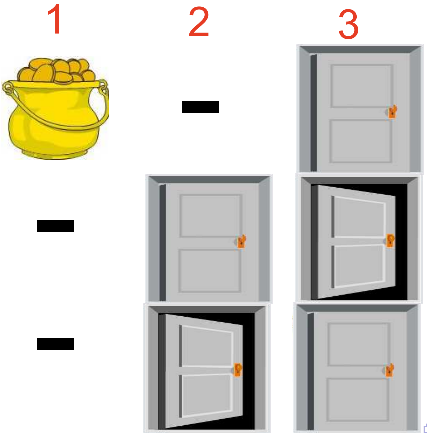
Strategie - „neměním názor"



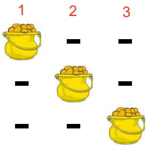
Podmíněná pravděpodobnost



Strategie - „neměním názor"

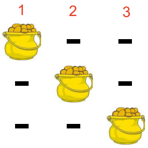


Podmíněná pravděpodobnost

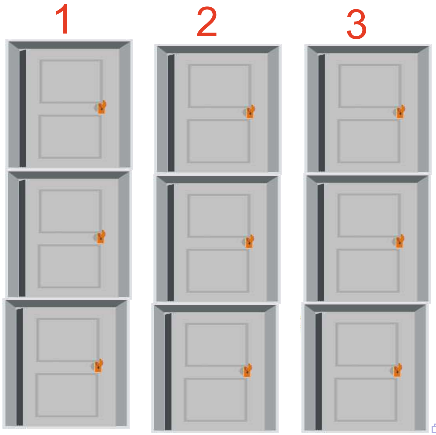


Strategie - „měním názor"

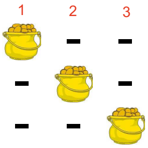
Podmíněná pravděpodobnost



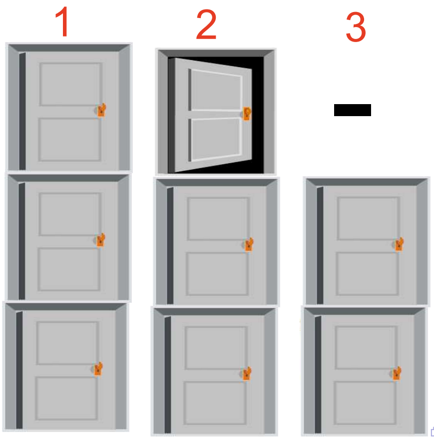
Strategie - „měním názor"

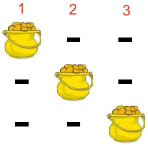


Podmíněná pravděpodobnost

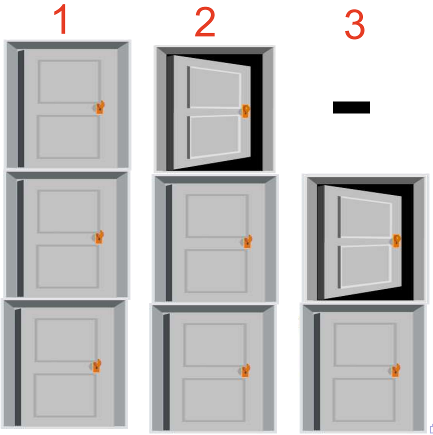


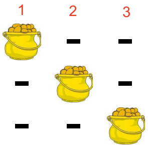
Strategie - „měním názor"



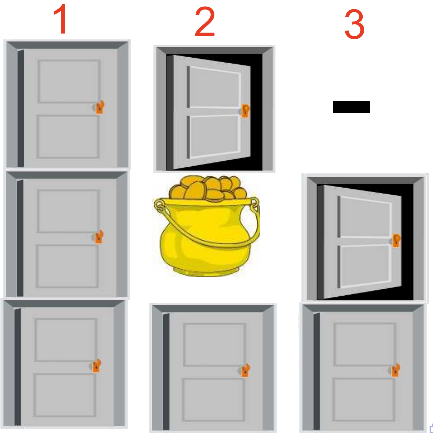


Strategie - „měním názor”

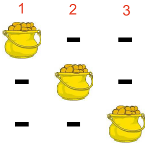




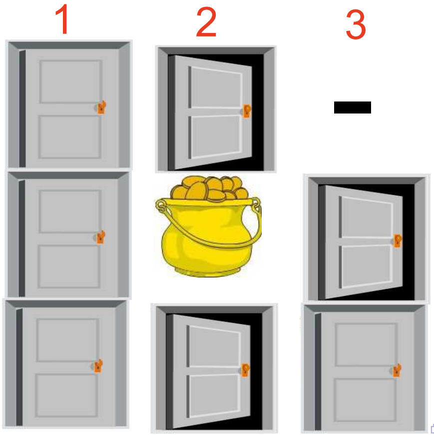
Strategie - „měním názor”



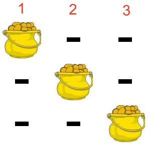
Podmíněná pravděpodobnost



Strategie - „měním názor"



Podmíněná pravděpodobnost



Strategie - „měním názor"