Prawdopodobieństwo Warunkowe
Prawdopodobieństwo Całkowite
Niezależność Stochastyczna Zdarzeń

Zadanie 1 Po potasowaniu sześciu kart: asa, dwójki, trójki, czwórki, piątki i szóstki wyłożono na stół w rzędzie cztery karty rewersami ku górze. Wynik tego rozkładania nie jest więc znany. Nie ujawniono także dwu kart pozostałych w ręku. Pozwolono Ci odkryć trzy pierwsze karty i żadna z nich nie jest asem (rys. 1). Jakie jest *w tej sytuacji* prawdopodobieństwo, że as leży na miejscu czwartym?

Zadanie 2 W komodzie, która ma 3 ponumerowane szuflady, rozmieszczono losowo dwie ponumerowane kule. Rozważmy dwa zdarzenia:

$A = \{\textit{szuflada nr 2 nie będzie pusta}\}$,

$B = \{\textit{szuflada nr 1 będzie pusta}\}$.

Oblicz $P(A|B)$.

Zadanie 3 Z rzutem dwiema kostkami, białą i czerwoną, zwiążmy następujące zdarzenia:

$A = \{\textit{na obu kostkach łącznie wypadnie 7 oczek}\}$,

$B = \{\textit{na białej kostce wypadną 4 oczka}\}$,

$C = \{\textit{łącznie na obu kostkach wypadnie 6 oczek}\}$.

$D = \{\textit{na każdej z kostek wypadnie nie więcej niż 4 oczka}\}$.

Dla każdych dwóch spośród tych zdarzeń rozstrzygnij, czy informacja o zajściu jednego z nich wpływa (i jak?) na prawdopodobieństwo drugiego z nich.

Zadanie 4 Z rzutem dwiema kostkami białą, i czerwoną, zwiążmy zdarzenia:

$A = \{\textit{na obu kostkach wypadną jednakowe liczby oczek}\}$,

$B_j = \{\textit{na każdej z kostek wypadnie nie więcej niż } j \textit{ oczek}\}, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

Zbadaj, czy i jak informacja o zajściu zdarzenia B_j wpływa na prawdopodobieństwo zdarzenia A. W zadaniu trzeba obliczyć $P(A|B_j)$ dla $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Zadanie 5 Z trzykrotnym rzutem monetą zwiążmy zdarzenia

$A = \{\textit{w drugim rzucie wypadnie orzeł}\}$,

$B = \{\textit{w pierwszym i trzecim rzucie wypadnie reszka}\}$,

$C = \{\textit{łącznie wypadną dwie reszki}\}$,

$D = \{\textit{w pierwszym rzucie wypadnie orzeł}\}$,

$E = \{\textit{w pierwszym rzucie wypadnie reszka}\}$.

Oblicz i porównaj: $P(A|B)$ i $P(A)$, $P(C|D)$ i $P(C)$ oraz $P(C|E)$ i $P(C)$.

Zadanie 6 Załóżmy, że $P(A) = 0$ i $P(B) > 0$. Wykaż, że $P(A|B) = P(A)$. Skorzystaj z twierdzenia, które orzeka, że jeśli $C \subset D$, to $P(C) \leqslant P(D)$.

Zadanie 7 Z n-krotnym rzutem kostką związmy następujące zdarzenia:

$A_j = \{$*w j-tym rzucie wypadnie jedno oczko*$\}$,

$B_k = \{$*w k-tym rzucie wypadnie szóstka*$\}$, gdzie $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ oraz $j \neq k$.

Wykaż, że zdarzenia A_j i B_k są stochastycznie niezależne.

Zadanie 8 Z n-krotnym rzutem kostką związmy zdarzenia:

$C_j = \{$*za j-tym razem wypadnie parzysta liczba oczek*$\}$,

$D_k = \{$*za k-tym razem wypadnie co najmniej 5 oczek*$\}$.

Wykaż, że dla $j \neq k$ zdarzenia C_j i D_k są stochastycznie niezależne.

Zadanie 9 Z pięciokrotnym rzutem monetą związmy następujące zdarzenia:

$A = \{$*w pierwszych trzech rzutach monetą reszka wypadnie dokładnie raz*$\}$,

$B = \{$*w dwu ostatnich rzutach wypadną same orły*$\}$,

$C = \{$*w trzech ostatnich rzutach wypadną same orły*$\}$.

Rozstrzygnij, czy zdarzenia A i B są stochastycznie niezależne. Czy są stochastycznie niezależne zdarzenia A i C? Czy spodziewałeś się takich odpowiedzi?

Zadanie 10 Rozważmy s-krotne losowanie bez zwracania kuli z urny $U_{1\to s}$ o s ponumerowanych kulach. Na j-tym etapie nastąpi skojarzenie, jeśli za j-tym razem zostanie wylosowana kula numer $j, j = 1, 2, 3, ..., s$. Rozważmy zdarzenia:

$A_j = \{$*na j-tym etapie nastąpi skojarzenie*$\}$, $j = 1, 2, 3, ..., s$.

Zbadaj niezależność zdarzeń A_j i A_k, gdy $j, k = 1, 2, 3, ..., s$ i $j \neq k$. Czy rozwiązanie zadania pozostaje w zgodzie z intuicją?

Zadanie 11 Postawiłeś na wynik losowego rozkładania czterech kart pikowych: waleta, damy, króla i asa na czterech miejscach. Stawiając na wynik przewidujesz jaka karta trafi na pierwsze, jaka na drugie, jaka na trzecie, a jaka na czwarte miejsce. Weźmy pod uwagę dwa zdarzenia:

$A = \{$*na drugim miejscu trafnie wytypujesz kartę*$\}$,

$B = \{$*trafnie uda Ci się przewidzieć kartę na trzecim miejscu*$\}$.

Zbadaj niezależność stochastyczną zdarzeń A i B.

Zadanie 12 Załóżmy, że zdarzenia A i B związane z doświadczeniem losowym δ są (w jego modelu) stochastycznie niezależne i że znamy ich prawdopodobieństwa. Za chwilę zostanie przeprowadzone doświadczenie δ. Oblicz w tej sytuacji prawdopodobieństwa zdarzeń:

$C = \{$*zajdzie dokładnie jedno ze zdarzeń* A, $B\}$,

$D = \{$*nie zajdzie żadne ze zdarzeń* A, $B\}$,

$E = \{$*zajdzie przynajmniej jedno ze zdarzeń* A, $B\}$.

Zadanie 13 Z zestawu 12 kart: czterech asów, czterech waletów i czterech dam ustalasz sobie trzy karty (nie usuwając ich z zestawu), a następnie będziesz losował jedną kartę. Z tym losowaniem zwiążmy dwa zdarzenia:

$A = \{$*wylosowana karta będzie asem*$\}$,

$B = \{$*wylosowana karta będzie jedną z trzech ustalonych*$\}$.

Na ile sposobów możesz ustalić taki podzbiór trzech kart, aby zdarzenia A i B były stochastycznie niezależne?

Zadanie 14 W pojemniku są dwie urny identyczne, gdy chodzi o wygląd zewnętrzny:

— urna U_b z dwiema kulami białymi i jedną czerwoną i

— urna U_c z jedną kulą białą i dwiema czerwonymi.

Doświadczenie losowe δ rozpoczyna się od losowania urny z pojemnika. Następnie, bez zaglądania do wnętrza wylosowanej urny, będzie z niej losowana kula n razy ze zwracaniem. Rozważmy zdarzenia związane z doświadczeniem losowym δ:

$B_j = \{$*wylosowana za* j*-tym razem kula będzie biała*$\}, j = 1, 2, 3, ..., n$

$C_j = \{$*wylosowana za* j*-tym razem kula będzie czerwona*$\}, j = 1, 2, 3, ..., n$.

Dla każdego $j = 1, 2, 3, ..., n$ zdarzenia B_j i C_j są przeciwne. Weźmy również pod uwagę zdarzenia związane z losowaniem urny:

$A_1 = \{$*na początku zostanie wylosowana urna* $U_b\}$,

$A_2 = \{$*na początku zostanie wylosowana urna* $U_c\}$.

Zdarzenia A_1 i A_2 tworzą układ zupełny zdarzeń i $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$.

Oblicz:

a) $P(B_1)$, $P(B_2)$ oraz $P(B_3)$;

b) $P(B_2|C_1)$ oraz $P(C_3|C_1 \cap B_2)$;

c) $P(B_2|B_1)$, $P(B_3|B_1 \cap B_2)$, $P(B_4|B_1 \cap B_2 \cap B_3)$;

d) $P(A_1|B_1)$, $P(A_1|B_1 \cap B_2)$ oraz $P(A_1|B_1 \cap B_2 \cap B_3)$;

Zadanie 15 Rekwizytem w grze są trzy krążki identyczne w dotyku: krążek z obu stron biały, krążek z obu stron czerwony i krążek z jednej strony czerwony z drugiej biały. Najpierw losujemy krążek a następnie szybkim ruchem kładziemy go na stole. Przeprowadzono to doświadczenie losowe i widoczna strona wylosowanego krążka jest biała. Jaka jest w tej sytuacji szansa na to, że wylosowany krążek jest z obu stron biały.

Zadanie 16 Wśród 65 monet jednozłotowych jest jedna z orłem zarówno na awersie jak i na rewersie. W sześciu rzutach losowo wybraną monetą otrzymano same orły. Jaka jest szansa, że to moneta z dwoma orłami?

Zadanie 17 Mamy dwie urny: U_{2*8} oraz U_{3*7}. Ustal procedurę losowania dwóch kul bez zwracania z tych urn, aby prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych było największe.

Zadanie 18 Podczas klasówki z historii Jan i Paweł siedzieli obok siebie. Między innymi mieli napisać dwie daty. Jan je pamiętał, ale nie wiedział jak je przyporządkować. Zapytał Pawła, wiedząc że w 3 przypadkach na 4 Paweł zna prawidłową odpowiedź. Jednk Paweł w 1 przypadku na 4 oszukuje Jana. Co jest lepsze dla Jana: posłuchać Pawła, czy odpowiedzieć losowo?

Zadanie 19 W komodach A, B i C są po dwie szuflady. W każdej szufladzie jest jedna moneta, przy czym w komodzie A są monety złote, w C – srebrne, a w B jest jedna moneta złota i jedna moneta srebrna. Wylosowano komodę, następnie szufladę i znaleziono tam monetę złotą. Jaka jest szansa, że w drugiej szufladzie jest też moneta złota?

Zadanie 20 Każda z 4 osób: A, B, C i D, mówi prawdę z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$. Osoba A wypowiada pewne zdanie logiczne do osby B, a następnie B powtórzyła je C, C powtórzyła je D, a D stwierdziła, że A powiedziała prawdę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoba A rzeczywiście wypowiedziała zdanie prawdziwe?

Zadanie 21 W mieście działają dwa przedsiębiorstwa taksówkowe: Zielone Taxi (85% samochodów) oraz Niebieskie Taxi (15% samochodów). Świadek nocnego wypadku zakończonego ucieczką kierowcy twierdzi, że samochód był niebieski. Eksperymenty wykazały, że świadek rozpoznaje kolor poprawnie w 80% przypadków, a myli się w 20% przypadków. Jaka jest szansa, że w wypadku uczestniczyła niebieska taksówka?

Zadanie 22 Test na rzadką chorobę, którą dotknięta jest średnio jedna osoba na tysiąc, daje fałszywą pozytywną odpowiedź w 95% przypadków (u osoby chorej daje zawsze odpowiedź pozytywną). Jaka jest szansa, że osoba, u której test dał odpowiedź pozytywną, jest faktycznie chora?

Zadanie 23 Wybieramy jedną rodzinę spośród rodzin mających n dzieci. Rozważmy dwa zdarzenia:

$A = \{$*w losowo wybranej rodzinie jest co najwyżej jedna dziewczynka*$\}$,

$A = \{$*w losowo wybranej rodzinie są dziewczynki i chłopcy*$\}$.

Czy zdarzenia A i B są niezależne?

Zadanie 24 W pewnej przestrzeni probabilistycznej zdarzenia A i B są niezależne oraz $A \cup B = \Omega$. Wykazać, że $P(A) = 1$ lub $P(B) = 1$.

Zadanie 25 Tenisista, aby awansować do następnej rundy turnieju, musi wygrać dwa mecze pod rząd z trzech. Może grać:

a) ze słabszym od siebie, z lepszym i znów ze słabszym, albo

b) z lepszym, ze słabszym i znów z lepszym;

Który wybór daje tenisiście większe szanse na awans, jeśli wyniki kolejnych meczów są niezależne?

Zadanie 26 Towarzystwo ubezpieczeniowe ma stałych klientów, którzy powodują w ciągu roku kolizję z prawdopodobieństwem $0,01$ oraz 15% nowych klientów, powodujących kolizję z prawdopodobieństwem $0,4$. Prawdopodobieństwo, że dany klient będzie miał kolizję w ciągu roku jest dla niego niezmienne, niezależnie od tego czy miał już kolizję wcześniej, czy nie. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrany klient będzie miał kolizję oraz prawdopodobieństwo, że losowo wybrany klient będzie miał drugą kolizję, skoro wiemy, że miał pierwszą.