

ZDARZENIE I JEGO PRAWDOPODOBIENSTWO 1

Zadanie 1 Niech A , B i C będą trzema dowolnymi zdarzeniami. Napisać wyrażenie analityczne reprezentujące zdarzenie, które polega na tym, że:

- (a) zachodzi tylko zdarzenie A ;
- (b) zachodzą tylko zdarzenia A oraz B ;
- (c) zachodzą wszystkie trzy zdarzenia;
- (d) zachodzi przynajmniej jedno z trzech zdarzeń;
- (e) zachodzą przynajmniej dwa zdarzenia;
- (f) zachodzi dokładnie jedno zdarzenie;
- (g) zachodzą dokładnie dwa zdarzenia;
- (h) nie zachodzi ani jedno zdarzenie;
- (i) zachodzą nie więcej niż dwa zdarzenia;

Zadanie 2 Udowodnij dla dowolnych zdarzeń A, B z rodziny \mathcal{Z} , opierając się na definicji prawdopodobieństwa w dyskretnej przestrzeni probabilistycznej, następujące własności prawdopodobieństwa:

- (a) $P(\Omega) = 1$ oraz $0 \leq P(A) \leq 1$;
- (b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
- (c) jeżeli $A \cap B = \emptyset$, to $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;
- (d) jeżeli $B = A'$, to $P(B) = 1 - P(A)$;
- (e) jeżeli $A \subset B$, to $P(A) \leq P(B)$;
- (f) jeżeli $A \subset B$, to $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

Zadanie 3 Określ prawdopodobieństwo P na rodzinie wszystkich zdarzeń związanych z losowaniem dwóch kul z urny U_{3*2} . Określ model tego losowania jako trójkę (Ω, \mathcal{Z}, P) .

Zadanie 4 Zaproponowano Ci udział w grze. Ty i twój przeciwnik będziecie na przemian rzucać kostką do gry dopóty, dopóki nie zostanie wyrzucona ścianka z sześcioma oczkami. Zwycięża ten, kto pierwszy wyrzuci szóstkę. Czy prawo pierwszeństwa jest w tej grze przywilejem?

Zadanie 5 Załóżmy, że dla zdarzeń A i B jest: $P(A) = 0,99$ i $P(B) = 0,9999$. Przyjmijmy, że są to prawdopodobieństwa tych zdarzeń w dowolnym dniu roku (w każdym dniu roku te prawdopodobieństwa są takie same). Obliczyć, z jakim prawdopodobieństwem każde z tych zdarzeń zajdzie w ciągu roku każdego dnia.

Zadanie 6 Gracz wypełnił dwa kupony totolotka. Na każdym skreślił inne sześć liczb. Może nadać te kupony tak, aby wzięły udział w jednym losowaniu lub w dwóch różnych (np. kolejnych) losowaniach. Jaką decyzję gracz powinien podjąć, aby mieć większe szanse na główną wygraną?

Zadanie 7 Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia:

$A = \{\text{wśród sześciu liczb wylosowanych spośród 49 w totolotku będą dwie kolejne liczby}\}.$

Zadanie 8 Na festynie wiosennym odbywają się dwie loterie. W pierwszej loterii jest 150 losów spośród których jeden wygrywa, w drugiej jest 300 losów spośród których dwa wygrywają. Ceny losów na obu loteriach są takie same. W której loterii wzięłbyś udział, jeżeli miałbyś pieniądze tylko na 1 los, a w której jeśli mógłbyś kupić dokładnie 2 losy?

Zadanie 9 Talia składa się z 52 kart (po 13 kart w każdym z czterech kolorów). Po wyciągnięciu jednej karty i zwróceniu jej do talii tasujemy karty i znów wyciągamy jedną kartę. Obliczyć prawdopodobieństwo, że obie wyciągnięte karty są tego samego koloru.

Zadanie 10 Rozważmy losowe rozmieszczenie trzech ponumerowanych kul w trzech ponumerowanych komórkach (zakładamy, że pierwsza komórka może pomieścić do trzech kul, natomiast druga i trzecia co najwyżej po jednej). Obliczyć prawdopodobieństwo, że:

- (a) co najmniej jedna komórka będzie pusta;
- (b) nie będzie pustej komórki;

Zadanie 11 Rozważmy rzut 12 kostkami 12-ściennymi oraz dwa zdarzenia związane z tym doświadczeniem losowym:

$A = \{\text{wypadną wszystkie liczby oczek}\};$

$B = \{\text{przynajmniej na dwu kostkach wypadnie taka sama liczba oczek}\}.$

Obliczyć prawdopodobieństwa tych zdarzeń.

Zadanie 12 *Odległością* liczb rzeczywistych x i y nazywamy liczbę $|x - y|$. W grze każdy z graczy G_A i G_B rzuci kostką. Jeśli odległość między wyrzuconymi liczbami oczek będzie równa 0, 1 albo 2, to zwycięży G_A , jeśli ta odległość będzie równa 3, 4 albo 5, to zwycięży G_B . Czy jest to gra sprawiedliwa?

Zadanie 13 Z urny U_{5*1} dwaj gracze, G_A i G_B , będą losować na przemian bez zwracania kulę tak długo, aż zostanie wylosowana kula czerwona. Zwycięży ten, kto wylosuje tę czerwoną kulę. Gracz G_A będzie losował pierwszy. Czy taka gra losowa jest sprawiedliwa?

Zadanie 14 Masz w kieszeni 6 kluczy identycznych w dotyku, z nich tylko jeden pasuje do drzwi, które masz otworzyć. Wyciągasz z kieszeni klucz, próbujesz otworzyć nim drzwi i jeśli nie pasuje, to przekładasz go do drugiej kieszeni. Z jakim prawdopodobieństwem uda Ci się otworzyć drzwi nie później niż za czwartym razem?

Zadanie 15 Kowalski z żoną i Nowak z żoną zasiedli do brydża. Za chwilę zostaną rozdane karty. Oblicz prawdopodobieństwo, że przy rozdawaniu kart:

- (a) każdy z czterech graczy dostanie asa (zdarzenie A),
- (b) jeden z graczy dostanie cztery asy (zdarzenie B),
- (c) Kowalska dostanie cztery asy (zdarzenie C),
- (d) Kowalscy dostaną wszystkie cztery asy (zdarzenie D).

Zadanie 16 Z 12 pytań student przygotował odpowiedz na 6. Komisja egzaminacyjna wybrała z tych 12 pytań 5. Na egzaminie student losuje 3 pytania spośród tych pięciu. Jeśli student odpowie na co najmniej jedno pytanie, to komisja uznaje egzamin za zdany. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ten student zda egzamin?