

## KOMBINATORYKA

**Zadanie 1** Policz na ile sposobów z talii 52 kart można wybrać 6 tak, aby były wśród nich:

- a) cztery asy;
- b) dwa asy, dwa króle i dwie damy;
- c) po trzy karty z dwu różnych kolorów (czerwone i czarne);
- d) sześć kart w ustalonym kolorze;
- e) sześć kart w jednym kolorze.

**Zadanie 2** Policz, ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych, w których zapisie nie występuje cyfra 0.

**Zadanie 3** Policz, ile jest:

- a) wszystkich liczb czterocyfrowych;
- b) wszystkich liczb czterocyfrowych o wszystkich cyfrach różnych.

**Zadanie 4** Na ile różnych sposobów może się ubrać pani posiadająca 3 różne kapelusze, 5 różnych sukni i 4 pary różnych pantofli?

**Zadanie 5** Ile można wykonać różnych trójkolorowych chorągiewek z sześciu barw?

**Zadanie 6** Na ile sposobów może się ustawić w szereg 5 mężczyzn i 2 kobiety tak, aby kobiety nie stały obok siebie?

**Zadanie 7** Z cyfr 2, 4, 5, 6, 7 układamy liczby pięciocyfrowe podzielne przez 4, w których każda z danych cyfr występuje tylko raz. Ile takich liczb można ułożyć?

**Zadanie 8** Na ile sposobów można posadzić przy okrągłym stole cztery osoby, jeżeli:

- a) krzesła są numerowane;
- b) za jedno ustawienie uważamy wszystkie przypadki, gdzie każda z osób ma po prawej stronie tę samą osobę;
- c) za jedno ustawienie uważamy wszystkie przypadki, gdzie każda z osób ma tych samych sąsiadów.

**Zadanie 9** W pewnej szkole jest osiem sal lekcyjnych i osiem klas. W dniu 1. kwietnia uczniowie postanowili zamienić się salami tak, by żaden oddział nie był w tej samej sali, która jest mu przypisana w planie. Na ile sposobów można dokonać takiej zamiany?

**Zadanie 10** Na półce są 3 powieści historyczne, 5 kryminałów i 4 powieści fantastyczne. Na ile sposobów można je ustawić na półce, dbając jednak o to, by książki z jednego rodzaju literackiego stały obok siebie.

**Zadanie 11** Pięciu kolegów wybrało się do kina i znalazło rząd, w którym było 20 wolnych miejsc. Na ile sposobów mogą oni wybrać swe miejsca w tym rzędzie, jeśli:

- a) mogą siedzieć dowolnie (razem lub osobno);
- b) muszą siedzieć razem (tzn. jeden obok drugiego);
- c) nie mogą siedzieć razem (każdych dwóch musi przedzielać przynajmniej jedno miejsce);

**Zadanie 12** Na ile sposobów można z pełnej talii 52 kart wybrać 4 karty tak, aby:

- a) każda karta była innego koloru;
- b) nie było wśród nich dwóch kart tej samej wartości;
- c) nie było wśród nich dwóch kart tej samej wartości i każda była innego koloru.

**Zadanie 13** Spotkało się 20 przyjaciół i każdy z każdym wymienił uścisk dłoni. Ile było wszystkich uścisków dłoni?

**Zadanie 14** Na okręgu obrano sześć punktów. Ile różnych czworokątów wyznaczają te punkty? Ile różnych odcinków, o końcach w tych punktach, wyznaczają te punkty? Ile przekątnych ma dowolny 6-kąt wypukły? A ile przekątnych ma dowolny  $n$ -kąt wypukły?

**Zadanie 15** Znajdź liczbę wszystkich  $m$ -wyrazowych ciągów o wyrazach ze zbioru  $\{0, 1\}$ , w których:

- a) dokładnie  $k$  wyrazów jest równych 1 ( $k = 0, 1, \dots, m$ );
- b) dokładnie  $k$  wyrazów jest równych 1 i ostatnim wyrazem ciągu jest 1 ( $k = 0, 1, \dots, m$ ).

**Zadanie 16** Sześcian wykonany z drewna pomalowano farbą a następnie pocięto 27 płaszczyznami równoległymi do ścian sześcianu na tysiąc sześcianów. Ile powstałych w ten sposób sześcianów ma ściany tylko z drewna, ile sześcianów ma  $n$  ścian pomalowanych farbą ( $n = 1, 2, 3$ )?

**Zadanie 17** Autobusem, zatrzymującym się na 10 przystankach, jedzie 7 osób. Na ile sposobów osoby te mogą wysiąść z autobusu tak, aby każda wysiadła na innym przystanku?

**Zadanie 18** Niech  $S$  będzie  $s$ -elementowym zbiorem. Udowodnij wzory na liczbę:

- a)  $k$ -wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru  $S$ :  $s^k$
- b)  $k$ -wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru  $S$ :  $\frac{s!}{(s-k)!}$
- c)  $k$ -elementowych kombinacji zbioru  $S$ :  $\binom{s}{k} = \frac{s!}{(s-k)! \cdot k!}$
- d) permutacji zbioru  $S$ :  $s!$

**Zadanie 19** Ile spośród permutacji zbioru  $\{1, 2, \dots, 9\}$  między 0 i 1 zawiera dokładnie cztery cyfry? A w ilu permutacjach cyfry 7, 8 i 9 stoją obok siebie?

**Zadanie 20** Dane są dwa zbiory:  $A$  i  $B$ , składające się odpowiednio z 4 i 5 elementów (zakładamy, że  $A \cap B = \emptyset$ ):

- a) ile jest pięcioelementowych zbiorów składających się dokładnie z 2 elementów ze zbioru  $A$  i trzech elementów ze zbioru  $B$ ;
- b) ile jest pięciowyrazowych ciągów, w których dokładnie 2 wyrazy są elementami zbioru  $A$  i 3 elementami zbioru  $B$ .

**Zadanie 21** Obliczyć liczbę możliwych sposobów rozmieszczenia:

- a)  $k$  nierozróżnialnych kul na  $n$  ponumerowanych miejscach ( $k < n$ );
- b)  $k$  nierozróżnialnych kul w  $n$  ponumerowanych szufladach;
- c)  $k$  ponumerowanych kul na  $n$  ponumerowanych miejscach ( $k < n$ );
- d)  $k$  ponumerowanych kul w  $n$  ponumerowanych szufladach.

**Zadanie 22** Rolnik hoduje kapustę na grządce w kształcie kwadratu. Załóżmy, że w pierwszym roku rośnie na grządce jedna kapusta i że w każdym następnym roku grządka powiększa się o jeden rząd na północ i jeden rząd na wschód. W tym roku na grządce rośnie 27 główek kapusty więcej niż przed rokiem. Ile główek kapusty rośnie w tym roku na owej grządce?

**Zadanie 23** Planszą do japońskiej gry GO jest kwadrat podzielony na 169 małych kwadratowych oczek w układzie  $13 \times 13$ . W każdym oczku stawiamy kamień - czarny lub biały. Nazwijmy *obrazem* każde możliwe zapełnienie tej planszy czarnymi i białymi kamieniami. Ile takich obrazów można utworzyć?

**Zadanie 24** Ojciec chce oddać swoim trzem synom swój majątek w postaci dziesięciu jednakowych złotych monet. Na ile sposobów może to zrobić, przy założeniu, że każdemu synowi chce przekazać co najmniej jedną monetę?

**Zadanie 25** W woreczku znajduje się 12 jednakowych białych kul. Na ile sposobów można te kule pomalować trzema kolorami: czerwonym, zielonym i niebieskim, każdy kolor wykorzystując do pomalowania co najmniej jednej kuli?

**Zadanie 26** Będziemy zginać dużą kartkę papieru na pół, tak zgiętą kartkę znów na pół i tak aż 20 razy. Jak gruby powstanie plik papieru po takiej procedurze? Zakładamy, że książka, która liczy 150 stron ma grubość 1 cm (abstrahujemy tu od fizycznych możliwości wykonywania aż tylu zgięć).